Inleiding tot de getaltheorie

Pieter de Jong

Eindhoven

September 2023

Logos en ratio

A ratio is a sort of relation in respect of size between two magnitudes of the same kind. (Euclid's Elements Book V Def. 3)

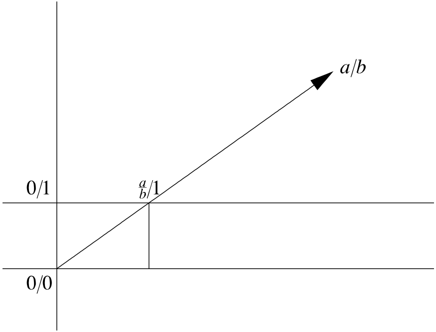
Vaak wordt 'ratio' gebruikt als vertaling voor het Griekse $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$, dat is de verhouding

$$a \ / \ b$$

een analogon is een overeenkomende $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$

$$a \ / \ b = c \ / \ d$$

Het is echter nodig een onderscheid te maken tussen logos en ratio.



We definiëren de logos $a\ /\ b$ als de verhouding tussen twee grootheden, en de ratio $\frac{a}{b}\ /\ 1$ als de verhouding van het quotiënt tot één.

$$a\ /\ b = \frac{a}{b}\ /\ 1$$

Het gelijkteken maakt van de verhouding een deling.

Interpretatie ratio

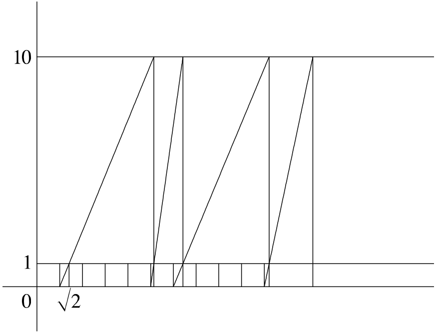
De ratio $\frac{a}{b}$ / 1 kan worden geïnterpreteerd als

- een decimale breuk,
- een soortgelijke breuk met een andere basis,
- of een kettingbreuk (continue fractie).

Punten op een rechte lijn kunnen worden weergegeven door reële getallen uitgedrukt in decimalen. Om de unieke decimaal van een reëel getal $10^{\pm n} \leqslant a < 10^{\pm n+1}$ te bepalen, definiëren we

$$\frac{a}{10^{\pm n}} = a_0.a_1a_2\cdots r_m$$

Voorbeeld



$$\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{r_4}{10000}$$

$$\sqrt{2} = 1.414\, r_4$$

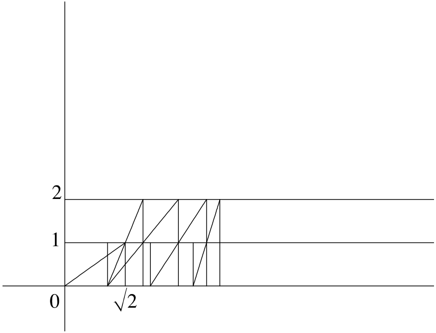
Het binaire talstelsel is de basis 2-telmethode waarbij alleen de cijfers 0 en 1 worden gebruikt. Deze basis wordt gebruikt in computers, omdat hiermee alle getallen eenvoudig kunnen worden weergegeven als een reeks elektrische pulsen. Voor een getal $2^{\pm n} \leqslant a < 2^{\pm n+1}$ definiëren we

$$\frac{a}{2^{\pm n}} = a_0.a_1a_2\cdots r_m$$

Interpretatie ratio

Binaire ontwikkeling

Voorbeeld



$$\sqrt{2} = 1 + \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{r_4}{16}$$

$$\sqrt{2} = 1.011r_4$$

Een reguliere continue fractie is een expressie van de vorm

$$a = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots \cfrac{1}{r_n}}}$$

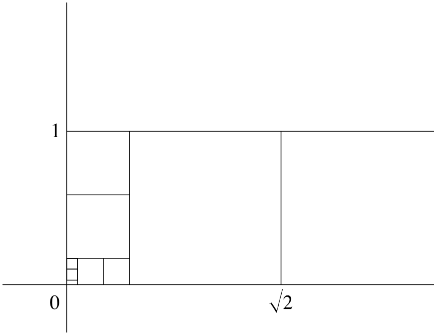
waarin

$$a_n = [r_n]$$

het gehele deel van r_n is. We definiëren

$$a = (a_1, a_2, a_{3,\dots}, r_n)$$

Voorbeeld $\sqrt{2} = (1, 2, 2, 2, r_5)$



$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{r_5}}}}$$

Interpretatie ratio

Continue fractie

- $$1 = 1$$

- $$1 = 1$$
- $$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Interpretatie ratio

Continue fractie

- $$1 = 1$$
- $$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
- $$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5}$$

Interpretatie ratio

Continue fractie

- $$1 = 1$$
- $$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
- $$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}$$
- $$\ldots$$

- $$1 = 1$$
- $$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
- $$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5}$$
- $$\dots$$
- $$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{r_5}}}} = \frac{17r_5 + 7}{12r_5 + 5}$$

Interpretatie ratio

Continue fractie

Convergenten van $\sqrt{2} = (1, 2, 2, 2, r_5)$

- $$\frac{1 \times 1 + 0}{1 \times 0 + 1} = \frac{1}{1}$$

Convergenten van $\sqrt{2} = (1, 2, 2, 2, r_5)$

- $$\frac{1 \times 1 + 0}{1 \times 0 + 1} = \frac{1}{1}$$
- $$\frac{2 \times 1 + 1}{2 \times 1 + 0} = \frac{3}{2}$$

Interpretatie ratio

Continue fractie

Convergenten van $\sqrt{2} = (1, 2, 2, 2, r_5)$

- $$\frac{1 \times 1 + 0}{1 \times 0 + 1} = \frac{1}{1}$$
- $$\frac{2 \times 1 + 1}{2 \times 1 + 0} = \frac{3}{2}$$
- $$\frac{2 \times 3 + 1}{2 \times 2 + 1} = \frac{7}{5}$$

Interpretatie ratio

Continue fractie

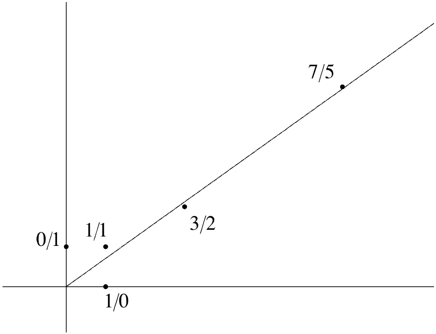
Convergenten van $\sqrt{2} = (1, 2, 2, 2, r_5)$

- $$\frac{1 \times 1 + 0}{1 \times 0 + 1} = \frac{1}{1}$$
- $$\frac{2 \times 1 + 1}{2 \times 1 + 0} = \frac{3}{2}$$
- $$\frac{2 \times 3 + 1}{2 \times 2 + 1} = \frac{7}{5}$$
- $$\frac{2 \times 7 + 3}{2 \times 5 + 2} = \frac{17}{12}$$

Convergenten van $\sqrt{2} = (1, 2, 2, 2, r_5)$

- $$\frac{1 \times 1 + 0}{1 \times 0 + 1} = \frac{1}{1}$$
- $$\frac{2 \times 1 + 1}{2 \times 1 + 0} = \frac{3}{2}$$
- $$\frac{2 \times 3 + 1}{2 \times 2 + 1} = \frac{7}{5}$$
- $$\frac{2 \times 7 + 3}{2 \times 5 + 2} = \frac{17}{12}$$
- $$\frac{17 r_5 + 7}{12 r_5 + 5} = \sqrt{2}$$

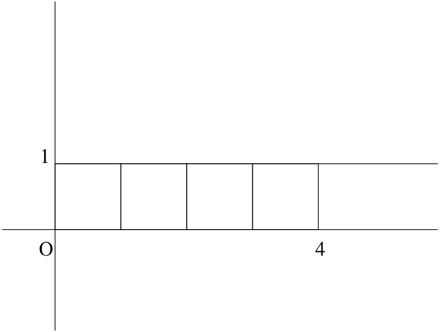
Convergenten



$$\sqrt{2} \simeq \frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{17r_5+7}{12r_5+5}$$

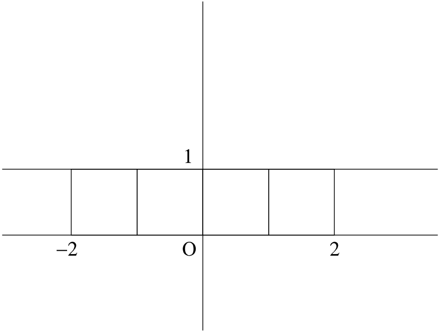
Continue fracties van verschillende getallen

- natuurlijke getallen
- gehele getallen
- rationale getallen
- irrationale getallen
- algebraïsche getallen
- transcendente getallen



De verzameling van de natuurlijke getallen is de verzameling

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

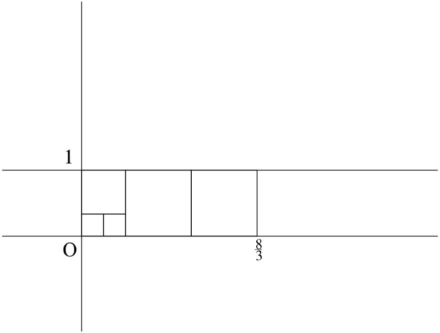


De verzameling van de gehele getallen is de verzameling

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

Continue fracties

Rationale getallen



De verzameling van de rationale getallen is de verzameling $\mathbb{Q}$ die bestaat uit alle getallen die geschreven kunnen worden als $\frac{n}{m}$ waarbij n en m natuurlijke getallen zijn

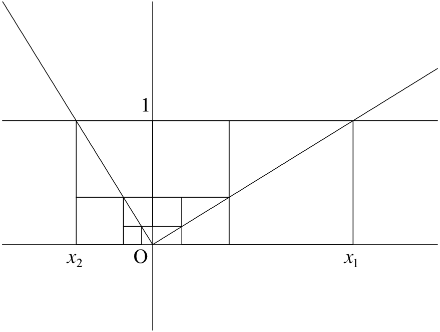
$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$$

Getallen die niet rationaal zijn, noemen we irrationale getallen. De irrationale getallen kunnen worden ingedeeld in twee categorieën, namelijk de algebraïsche getallen en de transcendente getallen.

Algebraïsche getallen zijn getallen die het nulpunt zijn van een polynoom

$$a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

met rationale coëfficiënten en eindige graad.



Tweedegraadsvergelijking

$$x^2 - x - 1 = 0$$

- $$x^2 = x + 1$$

  $$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$

  recurrentie

  $$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} + p_{n-2}}{q_{n-1} + q_{n-2}}$$

-

$$x^2 = x + 1$$

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$

recurrentie

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} + p_{n-2}}{q_{n-1} + q_{n-2}}$$

- Absoluut grootste wortel

$$x_1 \sim \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \cdots, \frac{p_n}{q_n}$$

- $$x^2 = x + 1$$
  $$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$
  recurrentie
  $$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} + p_{n-2}}{q_{n-1} + q_{n-2}}$$
- Absoluut grootste wortel
  $$x_1 \sim \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \cdots, \frac{p_n}{q_n}$$
- continue fractie
  $$x_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots, x_1)$$

- $$x^2 - x = 1$$
  $$x^{-n+2} - x^{-n+1} = x^{-n}$$

  recurrentie

  $$\frac{p_{-n+2} - p_{-n+1}}{q_{-n+2} - q_{-n+1}} = \frac{p_{-n}}{q_{-n}}$$

- $$x^2 - x = 1$$
  $$x^{-n+2} - x^{-n+1} = x^{-n}$$
  recurrentie
  $$\frac{p_{-n+2} - p_{-n+1}}{q_{-n+2} - q_{-n+1}} = \frac{p_{-n}}{q_{-n}}$$
- Absoluut kleinste wortel
  $$\frac{p_{-n}}{q_{-n}}, \dots, \frac{5}{-8}, \frac{-3}{5}, \frac{2}{-3}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{-1}, \frac{0}{1} \sim x_2$$

- $$x^2 - x = 1$$

  $$x^{-n+2} - x^{-n+1} = x^{-n}$$

  recurrentie

  $$\frac{p_{-n+2} - p_{-n+1}}{q_{-n+2} - q_{-n+1}} = \frac{p_{-n}}{q_{-n}}$$

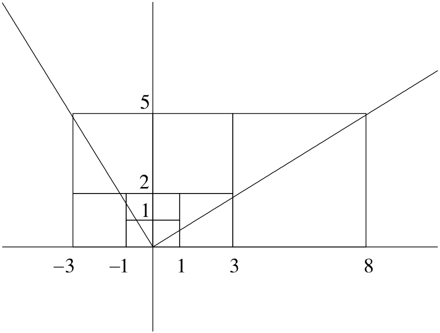
- Absoluut kleinste wortel

  $$\frac{p_{-n}}{q_{-n}}, \cdots, \frac{5}{-8}, \frac{-3}{5}, \frac{2}{-3}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{-1}, \frac{0}{1} \sim x_2$$

- continue fractie

  $$x_2 = (0, -1, -1, -1, -1, -1, \cdots, -x_1)$$

Tweedegraadsvergelijking



$$\frac{p_{-n}}{q_{-n}}, \ldots, \frac{-3}{5}, \frac{2}{-3}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{-1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}$$

Derdegraadsvergelijking

$$x^3 - x - 1 = 0$$

- $$x^3 = x + 1$$
  $$x^n = x^{n-2} + x^{n-3}$$

  recurrentie

  $$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-2} + p_{n-3}}{q_{n-2} + q_{n-3}}$$

Derdegraadsvergelijking

$$x^3 - x - 1 = 0$$

- $$x^3 = x + 1$$
  $$x^n = x^{n-2} + x^{n-3}$$
  recurrentie
  $$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-2} + p_{n-3}}{q_{n-2} + q_{n-3}}$$
- Absoluut grootste wortel

$$x_1 \sim \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \dots, \frac{p_n}{q_n}$$

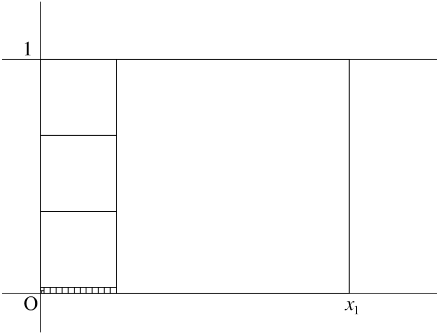
Derdegraadsvergelijking

- $$x^3 - x = 1$$
$$x^{-n+3} - x^{-n+2} = x^{-n}$$
- Complexe wortels
$$\frac{p_{-n+3} - p_{-n+2}}{q_{-n+3} - q_{-n+2}} = \frac{p_{-n}}{q_{-n}}$$
- Geen continue fractie

$$\frac{p_{-n}}{q_{-n}}, \dots, \frac{0}{-1}, \frac{1}{0}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{-1}, \frac{0}{1}, \left(\frac{0}{0}\right), \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \dots, \frac{p_n}{q_n}$$

Continue fracties

Algebraïsche getallen

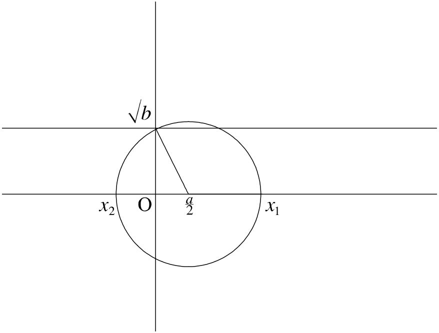


Van de derdegraadsvergelijking

$$x^3 - x - 1 = 0$$

heeft de absoluut grootste wortel geen periodieke continue fractie:

$$x_1 = (1, 3, 12, 1, 1, 3, r_7)$$



Van de algebraïsche getallen zijn in principe alleen de wortels van kwadratische vergelijkingen

$$x^2 - ax - b = 0$$

contrueerbaar met een passer en een liniaal, op de getallenlijn. Deze hebben een periodieke continue fractie.

- $$1+\sqrt{2} = (\overline{2,2}, r_3)$$
- $$1+\sqrt{3} = (\overline{2,1}, r_3)$$
- $$2+\sqrt{5} = (\overline{4,4}, r_3)$$
- $$2+\sqrt{7} = (\overline{4,1,1,1}, r_5)$$
- $$5+\sqrt{31} = (\overline{10,1,1,3,5,3,1,1}, r_9)$$

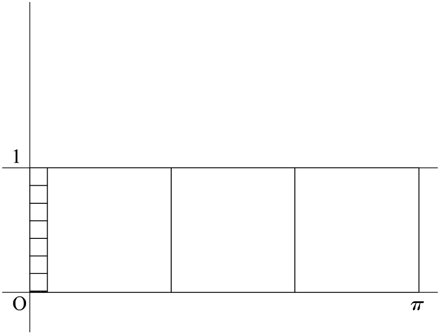
Transcendente getallen zijn getallen die NIET het nulpunt zijn van een polynoom

$$a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

met rationale coëfficiënten en eindige graad.
Deze hebben ook geen periodieke continue fracties, bijvoorbeeld e en π.

Continue fracties

Transcendente getallen



$$\pi = (3, 7, 15, 1, r_5)$$

Dit is geen regelmatige continue fractie.

$$(3, 7, 15, 1) \simeq \frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}$$

De irrationale en rationale getallen samen noemen we de reële getallen en die geven we aan met de letter $\mathbb{R}$

Onderzoek

Niet-reëele getallen

- Nul is een conceptueel getal, i.e. geen lijnstuk
- $bi = b\sqrt{-1}$ is een imaginair getal, i.e. een fictief lijnstuk